Управление образования города Пензы
МКУ «Центр комплексного обслуживания и методологического обеспечения учреждений образования» г. Пензы

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
Средняя общеобразовательная школа № 67 г. Пензы

XXVI научно-практическая конференция школьников г. Пензы
«Я исследую мир»

РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Исследовательская работа

Авторы:

Горбатов Арсений, 8 класс

Руководитель:

Андриянова Л. Н.,учитель математики

Пенза,2022

Содержание

«Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду,
а, если хотите научиться решать задачи, то решайте их»
Д. Пойа (книга «Математическое открытие»)

Задачи сопровождают человека на протяжении всей его жизни. Геометрические задачи в курсе математики занимают значительное место. Решение отдельных геометрических задач требует достаточно глубокого понимания
предмета и прививает любовь к самостоятельной творческой работе. На уроках я не раз сталкивался с ситуацией, когда одну и ту же задачу я и мои одноклассники решали совсем по-разному. У меня возникал вопрос, а сколькими способами можно решить одну и ту же задачу? А зачем мне нужно знать разные способы решения? На это можно ответить следующее:

- для того чтобы найти наиболее рациональное решение;
- поиск рационального (краткого, «красивого») решения – это увлекательное занятие и неплохая «зарядка для ума».

Тема исследования: решение геометрических задач различными способами.

Актуальность исследования:
Считаю данную тему актуальной, работая над задачей, я доказал, что существуют различные способы ее решения, используя материал геометрии, не выходя за рамки курса. А также умение решать планиметрические задачи при сдаче экзаменов. Большинство задач по планиметрии не решается с помощью жестких алгоритмов, почти каждая из предложенных требует своего подхода. Здесь уже мало иметь те или иные знания, нужно уметь применять их в каждом конкретном случае. Особое значение имеет выработка разнообразных эвристических подходов, которые могут быть успешно применены при решении многих геометрических задач. Задача выступила не только в качестве иллюстрации теории, но и рассматривалась как самостоятельный объект, как средство развития исследовательской и эвристической деятельности.
Исследуя эти решения, я увидели многообразие и красоту предмета геометрии. Эта исследовательская работа поможет углубить знания по математике.

Гипотеза исследования: изучать различные методы решения геометрических задач лучше на примере одной задачи, если она будет иметь несколько способов.

Цель: поиск рациональных методов решения геометрических задач из раздела планиметрии.

Задачи исследования:

- исследовать разнообразные методы решений планиметрических задач;
- подобрать и решить несколько геометрических задач всеми возможными изученными методами;
- проанализировать и сравнить полученные решения с целью нахождения наиболее эффективного подхода в каждом конкретном случае.

Объект исследования: геометрическая задача

Предмет исследования: являются различные методы решения задачи.

Методы исследования: алгебраический метод, векторный метод, координатный метод, метод геометрических преобразований, тригонометрический метод.

Введение

Первое решение задачи редко бывает лучшим и естественно стремиться к тому, чтобы найти более простое и красивое решение. Умение выбрать подходящий метод вырабатывается в процессе решения одной и тоже задачи. Получив несколько решений одной задачи не трудно выделить лучшее и оценить методы решения. Решение задачи различными методами дает возможность полнее исследовать свойства геометрической фигуры.

Иногда удается подметить свойство, о котором в задаче ничего не говориться, или получить интересное обобщение задачи важно и то, что, придя разными путями к одному и тому же результату, мы получаем уверенность в правильности решения.

Решение задачи, допускающих ряд решений,- увлекательная работа, требующая знания всех разделов школьной математики. Длительная работа над и той же задачей часто полезнее, чем решение нескольких задач. Для решения предполагаемых задач хотя бы одним способом не требуется знаний, выходящих за пределы школьной программы по математики. Они могут быть решены с помощью геометрических приемов или средствами алгебры.

Одним из основных методов решения геометрических задач является алгебраический метод. Можно выделить две его разновидности: метод поэтапного решения и метод составления уравнений.

В простейших задачах искомую величину непосредственно выражают через данные величины по готовым формулам. При решении более сложных задач обычно последовательно вычисляются промежуточные величины, с помощью которых искомые величины связываются с данными. В этом состоит сущность поэтапного решения задачи.

Понятие вектора является одним из фундаментальных понятий в современной математики. Большая наглядность и простота векторных операций определяют использовать элементы векторной алгебры в школе, в курсах физики и математики. С помощью векторов могут быть решены содержательные геометрические задачи при чем их векторное решение часто значительно проще и эффективнее решений средствами элементарной геометрии.

При решении задач векторным методов находят применения сведения, известные из школьного курса геометрии: действие сложения векторов и его закон, вычитание векторов, действие умножения вектора на число и его законы, понятие коллинеарности векторов, разложения вектора в данном базисе, единственность разложения.

Для решения задач, связанных с длинами и углами применяется скалярное умножение векторов и его свойство. Умение пользоваться векторным методом требует определенных навыков. Прежде всего необходимо хорошее знание теории. Надо научиться переводить геометрические соотношения между фигурами на векторный язык, а также, наоборот, полученные векторные отношения истолковывать геометрически. Следует иметь ввиду, что векторный метод, как и любой другой, не является универсальным, хотя он позволяет решать широкий круг геометрических задач.

Координатный метод был разработан французскими математиками Декартом и Ферма в первой половине 17 века. Он является одним из самых универсальных методов решения геометрических задач. Сущность этого метода заключается в следующем. При помощи двух осей координат на плоскости каждой точки ставится в соответствие пара чисел(называемая координатами точки), при этом линии соответствует уравнение, точке пересечения линий – решение двух уравнений с двумя неизвестными и т.д.. Таким образом геометрический факт переводится на язык алгебры и для решения задачи используется алгебраический аппарат с его хорошо разработанными приемами тождественных преобразований и решения уравнений. Решение задачи методом координат не требует выполнения вспомогательных построений и естественным образом сводится к применениям правил алгебры. Однако в школьной практике координатный метод применяется довольно редко. Этот метод имеет и слабые стороны. Решение задачи часто усложняется тем, что простому геометрическому факту не всегда соответствует простая координатная форма, алгебраические преобразования бывают громоздкими и полученные алгебраические зависимости иногда трудно поддаются геометрическому истолкованию. Связи с этим следует отметить, что при решении задач координатным методом большое значение играет удачный выбор систему координат. Начало и оси координат следует присоединять к данной фигуре наиболее естественным образом. Обычно в качестве осей координат выбираются прямые, заданные в условии задачи, и оси симметрии фигуры, если они имеются.

Прямоугольная система координат хорошо известна из школьного курса математики. Она находит применение при решении метрических задач. Для решения задач, связанных с доказательством параллельности прямых, с вычислением отношения отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, и некоторых других более удобной является система координат, называемая общей декартовой или аффинной.

Преобразования плоскости- движения и подобия - во многих случаев позволяют экономно и изящно решать геометрические задачи. Однако владеть методом геометрических преобразований нелегко: не любая задача может быть решена этим методом и нужен определенный опыт, чтобы выбрать подходящий вид преобразования. При решении различных задач на доказательство, построение и вычисление широко применяются движения: осевая симметрия, параллельный перенос, поворот вокруг точки.

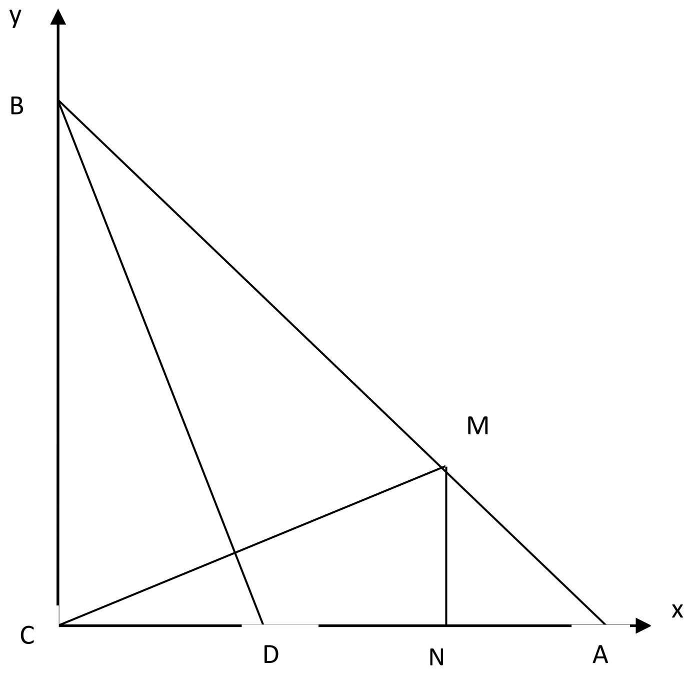
Тригонометрический метод использует применение тригонометрия, теорем синусов и косинусов.

Традиционный метод связан с использованием соотношений в треугольнике и круге, признаками равенства и подобия и др. Часто приходится проводить дополнительные построения, например описанные окружности.

Основная часть

Задача 1

Дан равнобедренный прямоугольный ΔABC. Прямая, проведенная через вершину прямого $\angle C$ перпендикулярно медиане ВД, пересекает гипотенузу в точке М. Найти $\frac{AM}{MB}$.



Решение 1 (метод координат)

Введем на плоскости прямоугольную систему координат: С(0;0), А(1;0), В(0;1), тогда Д (0,5;0) и угловой коэффициент к прямой ВД =-2.
Угловой коэффициент K_1 к прямой СМ удовлетворяет соотношение $K \times K_1 = -1$, следовательно $K_1 = \frac{1}{2}$ Запишем уравнения прямых СМ и АВ: $\begin{cases} y = 0,5x \\ x + y = 1. \end{cases}$

Решив полученную систему уравнений найдем координаты точки М: $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$

Если N проекция точки М на прямую АС, то $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$. Следовательно , $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$

Решение 2 (векторный метод)

Обозначим $\frac{AN}{NC} = \lambda$, $\overline{CA} = \bar{a}$, $\overline{CB} = \bar{в}$. По формуле деления отрезка в данном отношении выразим вектор $\overline{CM}$ через вектора $\bar{a}$ и $\bar{в}$.

Имеем: $\overline{CM} = \frac{\bar{a}+\lambda}{1+\lambda}$.

Согласно правилу вычитания векторов имеем $\overline{BD} = \frac{1}{2}\,\bar{a} - \bar{b}$.

Поскольку CM ⊥ВД, то имеем $\overline{CM}\times\overline{ВД} = 0$ или $(\bar{a} + \lambda\,\bar{в})\times(\frac{1}{2}\bar{a} - \bar{в}) = 0$

Учитывая, что $\bar{a}\times\bar{в} = 0$ и $\bar{a}^{\,2} = \bar{в}^{\,2} = 1$, получим, что $\lambda = \frac{1}{2}$

Решение 3 (метод тригонометрии)

Обозначим ∠ACM= α и применим теорему синусов к ΔACM и ΔBCM. Получим:

$\frac{AM}{CM} = \frac{\sin\alpha}{\sin 45^\circ}$, $\frac{BM}{CM} = \frac{\sin(90-\alpha)}{\sin 45^\circ}$

Отсюда $\frac{AM}{MB} = \tan\alpha$

Из условия задачи следует, что ∠ACM =∠ CВД. Тогда из ΔBCД имеем : $\tan\alpha = \frac{1}{2}$

Значит $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$

Решение 4

Проведем перпендикуляр MN к стороне AC так как ∠ MCN =∠ CВД,
тогда прямоугольные треугольники CMN и BCД подобны.
Следовательно $\frac{MN}{CN} = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2}$. Но AN=MN, значит $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$. Поскольку MN параллельна BC, имеем $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$.

Решение 5 (метод геометрических преобразований).

Рассмотрим поворот вокруг точки C на 90° , при котором точка B переходит в точку A.
Точка Д переходит в точку $Д_1$, лежащую на продолжение стороны BC.
ΔBCД перейдет в $ΔACД_1$. По свойству поворота $AД_1$ ⊥ВД. Так как CN ⊥ ВД, тогда $AД_1$ параллельна CM. Учитываю, что $CД_1 = CД = \frac{1}{2}BC$, тогда по теореме о сторонах угла, пересекаемых параллельными прямыми, получаем $\frac{AM}{MB} = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2}$.

И так, мы решили одну задачу 5 различными способами. Но это не предел: нужно лишь немного фантазии, геометрической интуиции, чтобы найти еще другие решения.

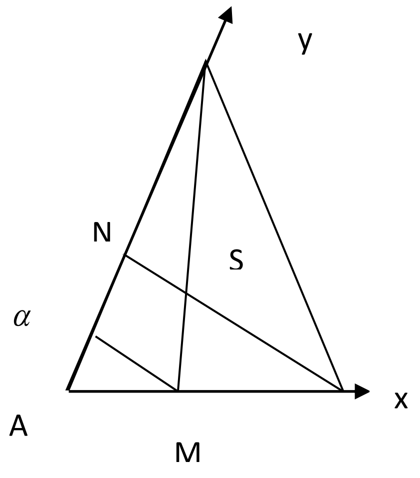
Так, если через вершину A ΔABC провести прямую перпендикулярную стороне AC, и обозначить её через K- точку пересечения её с прямой CM, тогда $\Delta ACK = \Delta BC Д$.
После чего не трудно установить, что $\frac{AM}{MB} = \frac{AK}{BC} = \frac{1}{2}$. И еще если доказать, что $\frac{DH}{HB} = \frac{1}{4}$, где H- точка пересечения отрезков ВД и CM, а затем провести ДЕ параллельно CM, где E- точка гипотенузы AB, тогда AE = EM = $\frac{1}{4}$ BM, откуда и следует отверждение задачи.

В отличие от первых трех решений особенностью последующих является использование вспомогательных линий, которые проводятся с целью получить равные или подобные треугольники. Полученное решение геометрически наглядны и красивы, но чтобы догадаться, какие именно линии следует провести, нужны определенный опыт и сообразительность.

Задача №2

На сторонах AB и AC ΔABC даны соответственно точки M и N, такие что $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NA} = \frac{1}{2}$.

Каком отношении точка S пересечении отрезков BN и CM делит каждый из этих отрезков?



Решение 1.

Для того, чтобы вычислить отношение $\frac{CS}{SM}$, через точку M проведём прямую, параллельную прямой BN , и точку пересечения её со стороной AC обозначим её L. Так как AM = $\frac{1}{2}$ MB, тогда AL =$\frac{1}{2}$ LN. Согласно условию задачи, AL+LN=$\frac{2}{3}$ AC, или имеем $\frac{3}{2} LN = \frac{2}{3}$AC, т.е. LN = $\frac{4}{9}$AC. Ввиду того, что CN=$\frac{3}{4}$. Учитывая, что треугольники CNS и CLM, ALM иANB гомотетичны , находим, что $NS = \frac{3}{7}$ LM, BN=3LM.

Отсюда NS=$\frac{1}{7}$ BN. Значит SB=$\frac{1}{7}$ BN и $\frac{NS}{SB}=\frac{1}{6}$.

Решение2 (векторный способ)

Обозначим $\frac{CS}{SM} = \alpha$, $\frac{NS}{SB}=\beta$, для того ,чтобы вычислить α и β , выразим вектор $\overline{AS}$ двумя способами через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

По формуле деления отрезка в данном отношении имеем $\overline{AS}=\frac{\overline{AC}+\alpha\overline{AM}}{1+\alpha}$ и

$\overline{AS}=\frac{\overline{AN}+\beta\overline{AB}}{1+\beta}$, так как согласно условию задачи $\overline{AM}=\frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{AN}=\frac{1}{3}\overline{AB}$ и $\overline{AN}=\frac{2}{3}\overline{AC}$, то

$\overline{AS}=\frac{\overline{AC}+\frac{1}{3}\alpha\overline{AB}}{1+\alpha}$ $\overline{AS} = \frac{\frac{2}{3}\overline{AC}+\beta\overline{AB}}{1+\beta}$.

В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам AB и AC получим: $\frac{\alpha}{3(1+\alpha)}=\frac{\beta}{1+\beta}$, $\frac{1}{1+\alpha}=\frac{2}{3(1+\beta)}$. Откуда $\beta=\frac{1}{6}$, $\alpha=\frac{3}{4}$.

Решение3 (координатный метод)

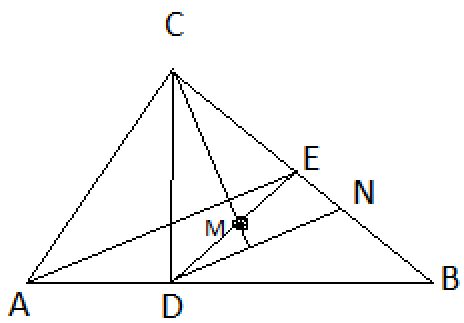
Введём на плоскости аффинную систему координат с началом в точке A и координатными векторами AB и AC . Тогда имеем : B(1;0) , C(0;1) и , согласно условию задачи , M($\frac{1}{3}$;0) , N(0; $\frac{2}{3}$) . Запишем уравнения прямых CM и BN :

$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + \frac{3}{2}y = 1 \end{cases}$, откуда x=$\frac{1}{7}$, y=$\frac{4}{7}$.

Значит S($\frac{1}{7}$;$\frac{4}{7}$) . Теперь легко находим искомые отношения :

$\frac{CS}{SM} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}} = \frac{3}{4}$, $\frac{NS}{SB} = \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{1}{6}$.

Задача №3



Дано: равнобедренный треугольник ABC, высота CD и перпендикуляр DE к боковой стороне BC .

Точка M – середина отрезка DE .

Доказать ,что AE ⊥ CM .

Решение 1 .

Середину N отрезка BE соединим с точкой D. Так как DN- средняя линия треугольника ABE, то DN|| AE. Следовательно, достаточно доказать, что CM ⊥DN.

Пусть прямая CM пересекает отрезок DN в точке O. Прямоугольные треугольники CDE и DBE подобны, так как ∠CDE= ∠B= 90°-∠BCD. Точки M и N- середины соответственных сторон, поэтому треугольники CDM и DBN также подобны. Значит, ∠CDO= 90°-λ и ∠COD=90°, то есть CM⊥DN и, следовательно, CM⊥AE.

Решение 2.

Более экономнее и нагляднее доказательство перпендикулярности отрезков CM и DN можно получить, применив поворот вокруг точки E на 90° и гомотетию с тем же центром и коэффициентом R= $\frac{DE}{CE}$. При этом центрально- подобном повороте треугольник CDE отображается на треугольник DBE, точки C и D отображаются на точки D и B($\frac{BE}{DE}$=$\frac{DE}{CE}$=R), середина M отрезка DE- на середину N отрезка BE, то есть отрезок CM- на отрезок DN. А так как при центрально- подобном повороте угол между любым лучом и его образом равен углу поворота, то отрезки CM и DN перпендикулярны.

Переходим к решению этой задачи координатным методом. Прежде всего следует –на осях координат, тогда некоторые координаты будут нулевыми. Это позволяет упростить вычисления.

Решение 3.

Примем точку D за начало прямоугольной системы координат, а оси координат выберем так, чтобы вершины треугольника ABC имели координаты : A(-1;0), B(1;0), C(0;c).

Вычислим угловые коэффициенты прямых AE и CM. Для этого сначала найдем координаты точек E и M.

Запишем уравнение прямой BC : $x + \frac{y}{c} = 1$, или $y = -cx + c$.

Так как DE ⊥ BC , то угловой коэффициент прямой DE равен $\frac{1}{c}$, а её уравнение имеет вид $y = \frac{1}{c}x$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} y = -cx + c \\ y = \frac{1}{c}x \end{cases}$, находим координаты точки E : $x_1 = \frac{c^2}{1+c^2}$, $y_1 = \frac{c}{1+c^2}$. Следовательно , M $(\frac{x_1}{2};\frac{y_1}{2})$. Угловые коэффициенты прямых AE и CM равны :

$k_1 = \frac{y_1}{x_1+1}$ и $k_2 = \frac{y_1 - 2c}{1}$.

Подставив значения x_1 и y_1, получим :

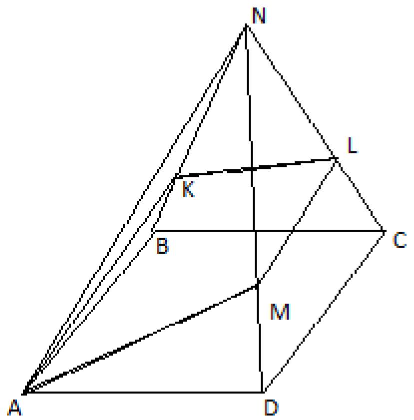
$k_1 = \frac{c}{2c^2+1}$ и $k_2 = -\frac{2c^2+1}{c}$.

Отсюда $k_1 k_2 = -1$, поэтому $AE \perp CM$.

Координатное решение не отличается краткостью , но оно очень простое , так как не требует вспомогательных построений .

Задача№4 №

Дана; четырехугольная пирамида NABCD, основанием которой служит параллелограмм. На боковых ребрах NB и NC взяты точки К и L такие, что $\frac{NK}{KB}$= 4 и NL=LC. Плоскость AKL пересекает ребро ND в точке M. Найти отношение $\frac{NM}{MD}$.



Решение 1.

Построим сечение данной пирамиды NABCD плоскостью AKL. Сначала построим точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD, затем точку P пересечения прямых AL и NO, наконец, точку M пересечения прямых KP и ND.

Согласно условию задачи $\frac{NK}{NB}=\frac{4}{5}$. Заметим, что P- точка пересечения медиан треугольника ACN, поэтому $\frac{NP}{NO}=\frac{2}{3}$. Найдем $\lambda =\frac{NM}{ND}$.

Обозначим площади треугольников NKP и NPM через S_1 и S_2, а площадь треугольника NBD- через S. Воспользуемся леммой об отношении площадей треугольников, имеющих общий угол. Учитывая, что площади треугольников NOB и NOD равны, получим:

$\frac{2S_1}{S} = \frac{NP \times NK}{NO \times NB} = \frac{8}{15}$, $\frac{2S_2}{S} = \lambda\frac{NP}{NO} = \frac{2}{3}\lambda$.

Аналогично найдем отношение площадей треугольника NKM и NBD: $\frac{S_1+S_2}{S} = \frac{4}{5}\lambda$.

Из двух предыдущих равенств имеем: $\frac{S_1+S_2}{S}=\frac{1}{3}\lambda+\frac{4}{15}$.

Следовательно, $\frac{4}{5}\lambda = \frac{1}{3}\lambda+\frac{4}{15}$, откуда $\lambda=\frac{4}{7}$.

Итак, $\frac{NM}{ND}=\frac{4}{7}$. Значит , $\frac{NM}{MD}=\frac{4}{3}$.

<u>Решение 2.</u>

Положим $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{b}$, $\overline{AN}=\bar{c}$,векторы $\bar{a}$, $\bar{в}$, $\bar{c}$ будем считать базисными.

Точки A, K, L, M принадлежат одной плоскости. Следовательно, выполняется равенство $\overline{AM}=\alpha\overline{AK}+\beta\overline{AL}$.

Выразим векторы $\overline{AK}$ и $\overline{AL}$ через базисные векторы. По формуле деления отрезка в данном отношении имеем:

$$\overline{AK}=\frac{\overline{AN}+4\overline{AB}}{5}=\frac{4\bar{a}+\bar{c}}{5}\ ,\ \overline{AL}=\frac{\overline{AC}+\overline{AN}}{2}=\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{2}\ ;$$

$$\overline{AM}=\left(\frac{4\alpha}{5}+\frac{\beta}{2}\right)\bar{a}+\frac{\beta}{2}\bar{b}+\left(\frac{\alpha}{5}+\frac{\beta}{2}\right)\bar{c}\,.$$

Теперь примем во внимание, что точка M принадлежит ребру ND. Обозначив $\frac{NM}{MD}=x$, получим: $\overline{AM}=\frac{x\bar{b}+\bar{c}}{1+x}$.

Учитывая единственность разложения вектора по базисным векторам, получим систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{4\alpha}{5}+\frac{\beta}{2}=0\\ \frac{\beta}{2}=\frac{x}{1+x}\\ \frac{\alpha}{5}+\frac{\beta}{2}=\frac{1}{1+x}\end{cases}$$

Решив эту систему, имеем: $x=\frac{4}{3}$.

Вычисления будут несколько короче, если условие принадлежности точек A, K, L, M одной плоскости записать в виде равенства $\overline{NA}=\alpha\overline{NK}+\beta\overline{NL}+(1-\alpha-\beta)\overline{NM}$

.

Заключение

В данной работе представлены основные методы решения геометрических задач из раздела «Планиметрия», которые описаны и представлены на примерах разных задач. А также найдены и решены задачи разными методами. Проделанная работа подтверждает, что выдвинутая гипотеза справедлива. Действительно, изучать различные методы решения геометрических задач можно на примере одной задачи. Подробный разбор способов решения задач является хорошим подспорьем для того, чтобы освежить в памяти пройденный материал. Накопившиеся знания не будут лежать мертвым грузом, их постоянно нужно использовать, вспоминая, то одну, то другую теорему или свойство фигуры. Механическое заучивание формул и теорем не способствует развитию мышления. Использование же этих знаний на практике является творческой работой, при которой действенно учишься применять теорию на практике. Чтобы найти рациональный метод решения задачи, нужно хорошо знать эти методы, тогда легче ориентироваться в их выборе.

В ходе исследования были сделаны следующие выводы:

– При решении задач разными способами формируется логическое мышление, развивается интуиция, систематизируются знания, расширяется общеобразовательный кругозор, накапливается полезный опыт.

– Можно овладеть основными методами решения задач, составляющих важную часть многих эвристических алгоритмов, учиться рационально, планировать поиск решения задачи, выполнять полезные преобразования условия задачи, а также использовать известные приемы познавательной деятельности – наблюдение, сравнение, обобщение.

– если решение задачи уже найдено на черновике, проверено и получен ответ, надо подумать, как лучше изложить решение. Этот этап работы не менее важен, чем поиск самого решения. В процессе подготовки полного текста решения иногда обнаруживаются некоторые пропуски в обоснованиях, логические, а иногда и вычислительные ошибки.

– чертеж в геометрической задаче должен быть описан в ее решении. Это значит, что в решении должны быть указаны все выполненные дополнительные построения, определены все незаданные условием задачи и введенные вами на чертеже, буквы, должны быть рассмотрены всевозможные способы размещения точек, отрезков, окружностей и обосновано выбранное вами их расположение. Имеет смысл, в процессе написания решения задать себе вопросы: почему нарисован чертеж именно таким образом, возможно ли иное размещение заданных в условии задачи фигур.

Зная, что задача может быть решена разными способами, можно смелее браться за ее решение. Постепенно, решая задачу за задачей, приобретем некоторый опыт, что позволит развить математическое чутье.

Разбор задач, допускающих ряд решений, – увлекательное занятие, требующее знания всех разделов школьной математики. Длительная работа над одной и той же задачей часто полезнее, чем решение нескольких задач.

Литература

1. Ротман Э. Г., Сконец З.А. Задача одна – решения разные: Геометрические задачи: Кн. Для учащихся. – М.: Просвещение, 2000.

2. Ротман Э. Г. Задачи по планиметрии и методы их решения: Пособие для учащихся. – М.: Просвещение: АО «Учеб. Лит.», 1996. - 240с

3.Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по решению математических задач: Геометрия. Учебное пособие для студентов пед. ин-тов по матиматике спец. – М.: Просвещение, 1984

4. Журнал. Математики в школе №8, 2010

5. Журнал. Математика в школе №6, 2012